Filosofische opvattingen over de wiskunde en de rol van de logica

John-Jules Meyer

Universiteit Utrecht

Filosofische stromingen in de wiskunde

- logicisme (Frege, Russell)
  - "wiskunde is een tak van de *logica*"
- formalisme (Hilbert)
  - "wiskunde is de wetenschap van *formele systemen*"
- intuitionisme (Brouwer)
  - "wiskunde houdt zich bezig met *mentale constructies*"

Filosofische stromingen in de wiskunde

- De precizering van deze filosofische posities heeft mede aanleiding gegeven tot het ontstaan van het vak *mathematische logica*.
- directe aanleiding tot het grondslagen-onderzoek van de wiskunde was het ontdekken van *paradoxen* in bepaalde fundamentele stukken wiskunde, m.n. de *verzamelingenleer*

De axiomatische (postulationele) methode

- de materiële axiomatische methode
  - geïnterpreteerde axioma's (axioma's met *inhoud* = *materia*)
  - bijv. Euclidische meetkunde
- de formele axiomatische methode
  - ongeinterpreteerde (= formele) axioma's [*forma* = *vorm*]
  - de ongedefinieerde termen worden beschouwd als 'betekenisloos'
    - Voordeel: afleidingen gelden tegelijk voor alle interpretaties
    - NB. Er moet wel minstens één interpretatie (model) zijn!!!

De genetische methode

- *de genetische methode* is een manier om mathematische objecten te *genereren / construeren* *volgens een bepaald voorschrift.*
- *Stellingen* drukken eigenschappen van deze objecten uit.

Voorbeeld van de gen. meth.

- De natuurlijke getallen worden gegenereerd door het voorschrift:
  - $0 \in \mathbf{N}$
  - $x \in \mathbf{N} \Rightarrow S(x) \in \mathbf{N}$
- Deze natuurlijke getallen voldoen aan bepaalde *eigenschappen* zoals bijv. $\neg\exists x \in \mathbf{N}: S(x) = 0$.

Genetische vs axiomatische methode

- de genetische methode verschilt van de axiomatische methode:
  - in de *axiomatische methode* worden *axioma's gepostuleerd* waarvan vervolgens nog een 'model' moet worden gezocht
  - de *genetische methode* eigenlijk begint met het construeren van een *model*, waarvan vervolgens de eigenschappen worden bepaald.

(Naïeve) Verzamelingenleer

– poging tot een zuiver *genetische* manier van het definiëren van verzamelingen uit ∅ d.m.v. operaties zoals vereniging ∪, machts-verzameling **P**(.) en *vol comprehensieprincipe*.

– "een verzameling is een samenvatting van bepaalde, onderscheiden objecten van onze aanschouwing of van ons denken tot een geheel" (Cantor)

Vol comprehensieprincipe

- *vol comprehensieprincipe*: bij iedere wel-geformuleerde conditie P(x) is er een verzameling V die precies die elementen x bevat die aan de conditie voldoen:

$$V = \{ x \mid P(x) \}$$

- deze definitie bleek te *vaag* en aanleiding tot ernstige *paradoxen*

De paradoxen van de naïeve verzamenlingenleer

- Cantor's paradox:
  - Zij S de verzameling van alle verzamelingen, en T de verzameling van deelverzamelingen van S.
  - Dan zegt Cantor's stelling dat cardinaliteit(S) < cardinaliteit(T).
  - Aan de andere kant is T een deelverzameling van S, de verzameling van *alle* verzamelingen. Dus cardinaliteit(T) ≤ cardinaliteit(S). Tegenspraak.

De paradoxen van de naïeve verzamenlingenleer

- Paradox van Burali-Forti:
  - Beschouw de verzameling O van ordinaalgetallen. O is (heeft) zelf per definitie een ordinaalgetal Ω (omdat O zelf welgeordend is) dat groter is dan alle andere ordinaalgetallen, maar anderzijds is Ω kleiner dan het volgende ordinaalgetal Ω + 1.

De paradoxen van de naïeve verzamenlingenleer

- Russell's paradox: Zij $R = \{V \mid V \notin V\}$. Volgens Cantor is dit een welgedefinieerde verzameling. Echter: er geldt nu dat $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$.
  - Russell's pseudo-paradox van de dorpsbarbier: beschouw een (mannelijke) dorpsbarbier die alle mannelijke dorpelingen scheert die zichzelf niet scheren. Deze scheert zichzelf d.e.s.d.a. hij zichzelf niet scheert.

INTERMEZZO: semantische paradoxen

- De Leugenaarsparadox:

'Deze zin is onwaar' (1)

Zin (1) is waar d.e.s.d.a. deze onwaar is.

Semantische paradoxen

- Berry's paradox: Beschouw een gefixeerd woordenboek en *'het kleinste natuurlijke getal dat niet met minder dan twintig woorden uit dit woordenboek gedefinieerd kan worden'*, waarbij al de woorden tussen de ' ' in dit woordenboek voorkomen.
  - Enerzijds moet dit getal bestaan, omdat de genoemde verzameling natuurlijke getallen niet leeg is.
  - Anderszijds staat tussen de ' ' een definitie van dit getal met slechts 16 woorden, zodat het niet kan bestaan.

Semantische paradoxen

- Richard's paradox: *'het kleinste getal dat in de Nederlandse taal met niet minder dan 120 lettertekens kan worden gedefinieerd'*, is in het Nederlands wél met minder dan 120 lettertekens te definiëren.

- *oorzaak: ontoelaatbare vermenging van vorm en betekenis!*

Oplossing paradoxen verzamelingenleer

- uitsluiting 'te grote verzamelingen' d.m.v. *axioma's.*
- naieve verzamelingenleer → *formeel-axiomatische verzamelingentheorie*
- bijv. het systeem ZF (Zermelo-Fraenkel), waarschijnlijk het eenvoudigste systeem waarin het meeste van de bestaande wiskunde kan worden afgeleid, maar voor zover bekend niet de paradoxen.
- genetische methode → *formeel axiomatische methode*

Formele verzamelingenleer

- *Systeem ZF* bevat als typische axioma's o.a.:

– $\exists x\,(Vx \wedge \forall y\,\neg(y \in x))$

(bestaan van lege verzameling $\emptyset$)

– $\forall x \forall y((Vx \wedge Vy \wedge \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \rightarrow x = y)$

(extensionaliteitsaxioma)

– $\forall x(Vx \rightarrow \exists y(Vy \wedge \forall z(z\in y \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w))))$

(vereniging: $y = \cup\, x$)

Nog enkele axioma's ZF

– $\forall x(Vx \rightarrow \exists y(Vy \wedge \forall z\,(z \in y \leftrightarrow (Vz \wedge z \subseteq x))))$

(machtsverzameling: $y = \mathbf{P}x$)

– $\exists x\,(Vx \wedge \emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \{y\} \in x))$

(bestaan oneindige verzameling)

Opmerking over ZF

- Later bleek dat zowel Cantor's continuum hypothese "cardinaliteit($\mathbb{R}$) is het *kleinste* cardinaalgetal groter dan cardinaliteit($\mathbb{N}$)" (CH) [Gödel, 1938] als de negatie ervan (¬CH) [Cohen, 1963] *consistent* met ZF.
  - Dit wil dus zeggen dat ZF te *zwak* is om deze eigenschap of z'n negatie af te dwingen
  - Roept weer vragen op naar een precieze karakterisering van verzamelingen

Alternatieve 'oplossing'

- Russell (en Poincaré) stelde(n) een alternatieve *genetische* methode voor de verzamelingentheorie voor door het gebruik van zgn. *impredicatieve* definities (het vermijden van bepaalde circulariteiten in definities).
- Echter deze worden veelvuldig gebruikt in de *analyse (calculus)*, zodat er een groot stuk wiskunde met deze methode niet kon worden behandeld.

Logicisme

- vorm van het zgn. *Platoons Realisme*
- mathematische objecten 'bestaan' onafhankelijk van de onderzoeker
- alle mathematische begrippen reduceerbaar tot abstracte eigenschappen
- wiskunde is de studie van de *logische* (evidente) basisprincipes mbt deze eigenschappen
- *wiskunde is een tak van de logica*

Logicisme

- *Russell* probeerde deze reductie tot de logica uit te voeren in de *Principia Mathematica*.
- deze poging was *niet geheel succesvol:*
- om de kracht van de wiskunde te behouden waren 'extra-logische' axioma's nodig (zoals *'oneindigheidsaxioma' en 'keuze axioma')*
- dit alles verzwakte de claim van het logicisme dat wiskunde geheel reduceerbaar tot de logica is aanzienlijk; het kwam neer op *wiskunde = logica + verzamelingenleer*

Formalisme

- wiskunde is het *manipuleren van eindige configuraties symbolen*, volgens voorgeschreven *regels*, ofwel:
- wiskunde is de wetenschap van *formele systemen,*
- bestaande uit een welomschreven *syntax* en een *afleidbaarheidscriterium*
- *N.B. wiskunde zelf is GEEN formeel systeem; zij houdt zich alleen bezig met formele systemen*

Formalisme

- *configuraties*: sommige hebben concrete betekenis;
- andere zijn *betekenisloos ('meaningless')*
- keuze van *regels*: uit *pragmatische* overwegingen → concrete zinvolle / bruikbare afleidingen
  - vb. *predikatenlogica, formele rekenkunde, ...*

Formalisme

- acceptatie van het feit dat delen van de klassieke wiskunde die het *actueel ('completed') oneindige* gebruiken uitgaan boven wat intuitief evident is! →
- formuleer (deel van de) wiskunde als een *formeel-axiomatische theorie en bewijs deze consistent*
- *kernprobleem*: hoe bewijs je delen wiskunde *consistent*, anders dan het gebruik van modellen die soms blijkbaar *onbetrouwbare verzamelingen* betreffen (*relatieve* consistentie)?

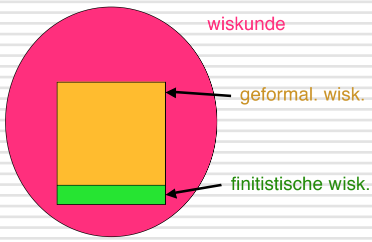
Hilbert's programma: de metamathematische methode

- kernprobleem: *absolute consistentiebewijzen*
- Is de (wiskunde→) rekenkunde consistent?
- Om deze vraag te beantwoorden stelde Hilbert voor om een *bepaalde zeer evidente soort van redeneren* (zgn. *finitistisch* methoden) te gebruiken: van *elementaire combinatorische* aard, zoals rekenkundige bewerkingen en het testen van verzamelingen op een *beslisbare* eigenschap.

Finitistische methoden

- de *finitistische wiskunde* werd door Hilbert beschouwd als de *eigenlijke wiskunde*: laat concrete representatie + manipulatie van tekenrijen toe, en is (evt. m.b.v. geschikte codering) onderdeel van de rekenkunde
- *eigenschappen van de geformaliseerde wiskunde* moeten vervolgens worden bewezen in de *metataal* via *finitistische* methoden (*'metamathematica'*)

Soorten wiskunde in Hilbert's programma



Consistentiebewijzen

- een *finitistisch* bewijs van de *consistentie* van de rekenkunde ($\vdash_{fin} Con_{PA}$), waarbij Con_{PA} staat voor de uitdrukking $\neg\exists x\, Prov(x, \ulcorner 0=1 \urcorner)$ met x een codegetal van een bewijs en $\ulcorner 0=1 \urcorner$ een codegetal voor de uitspraak 0=1) zou dan de consistentie van de rekenkunde garanderen: $\vdash_{PA} Con_{PA}$

Intuïtionisme (Brouwer)

- wiskunde is een op *zichzelf staande activiteit* betrekking hebbend op *mentale constructies volgens zelf-evidente regels, onafhankelijk van taal.*
- aanleiding tot kritische beschouwing van
  - de notie van een *(existentie-) bewijs*
  - de notie *mechanisch berekenbare functie*

Intuïtionisme: oneindige verzn

- volgens Brouwer vormen de *positive integers* het startpunt van de wiskunde via herhaalde duplicatie van het element 'I': 'I', 'II', 'III', ... -- te maken met de notie *'tijd'*
- *oneindige verzamelingen* zijn intuitionistisch gezien altijd '*potentieel* oneindig' (*onder constructie*) ipv *actueel* oneindig

Waarheid in het intuïtionisme

- waarheid van een bewering moet ook *constructief* zijn: berusten op een *bewijs* (een bepaald soort *mentale constructie*) --- gevolgen voor bewijzen van ∃-beweringen
- gevolg: *beweringen zijn niet waar of onwaar;* ze kunnen ook *onbepaald* zijn; zelfs *inherent onbepaald*, als het een *onbeslisbare* eigenschap betreft:

$$\nvDash_{intuit}\ p \vee \neg p$$

Intuïtionistische logica

- de intuitionistische interpretatie (van waarheid) van beweringen geeft aanleiding tot een *niet-klassieke logica:*
- *de zgn. intuitionistische logica (Heyting)*
- *asserties*: 'reports of completed *proofs'*

Intuïtionistische logica

- 'truth conditions':
  - $P \vee Q$: tenminste een van P, Q is *bewezen*
  - $P \wedge Q$: zowel P als Q is *bewezen*
  - $P \rightarrow Q$: men heeft een constructie C

  waarvan men heeft *bewezen* dat als C wordtt toegepast op elk mogelijk *bewijs* van P het resultaat een *bewijs* van Q is

Intuïtionistische logica

- $\neg P$: is hetzelfde als "$P \rightarrow \bot$", dwz elk mogelijk *bewijs* van P kan worden getransformeerd in een *bewijs* van een contradictie
- $\exists x\ P(x)$: er is een *constructie* van een s (in het domein waarover men kwantificeert) zdd P(s) *bewezen* is
- $\forall x\ P(x)$: er is een *bewijs* waarvan is aangetoond dat dit specialiseert tot een *bewijs* van P(s) voor elke s in het domein van kwantificatie.

Intuïtionistische logica

- formeel bewijssysteem: bijv. 'klassiek' systeem van natuurlijke deductie *minus de regel van de eliminatie van dubbele negatie:*

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

- Voor de rest is het systeem hetzelfde als voor klassieke logica, inclusief de *'ex falso sequitur quodlibet'* regel. Curieus is dat ook de regels voor de kwantoren ∀ en ∃ dezelfde zijn als in het klassiek geval *ondanks hun andere (constructieve) interpretatie!*

Intuïtionistische logica

- Enkele bekende *niet* afleidbare formules:

1. $\nvdash_{intuit} \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$
2. $\nvdash_{intuit} \varphi \vee \neg\varphi$
3. $\nvdash_{intuit} \exists y(\exists x\, \varphi \rightarrow \varphi[y/x])$ 'Plato's wet'

- maar wel:
- $\vdash_{intuit} \exists x\, \varphi \Rightarrow$ er is een term t zdd $\vdash_{intuit} \varphi[t/x])$

Axiomatiseren van de wiskunde

- Aanhangers van het *formalisme*, zoals Hilbert, droomden van *een volledige axiomatisering van de wiskunde*
- I.h.b. werd nagedacht over hoe de *rekenkunde* (volledig) kon worden geaxiomatiseerd, omdat deze de kern vormt van de wiskunde
  - *Peano's axiomatische rekenkunde (PA)*

Peano's axiomatische rekenkunde (PA)

- axioma's voor de rekenkunde naar Peano:
- 1. $\forall x\, \neg(0 = sx)$
- 2. $\forall x, y\, (sx = sy) \rightarrow (x = y)$
- 3. $\forall x\;\; x + 0 = x$
- 4. $\forall x, y\;\; x + sy = s(x + y)$
- 5. $\forall x, y\;\; x \times sy = (x \times y) + x$
- 6. $\forall x\;\; x \times 0 = 0$
- I. $(P(0) \wedge \forall x\, (P(x) \rightarrow P(sx))) \rightarrow \forall x\, P(x)$

inductie schema

Gezondheid van PA

- *gezondheid* van de Peano rekenkunde:

$$\vdash_{PA} \varphi \;\Rightarrow\; \mathbf{N} \vDash \varphi$$

- waarbij **N** staat voor het *standaardmodel* van de (eerste-orde) rekenkunde, d.w.z. de *natuurlijke getallen met de gebruikelijke definitie van optelling, vermenigvuldiging, successor en gelijkheid.*

Onvolledigheid PA

- Hilbert's programma (in zeer verregaande zin): er is een formeel systeem voor de wiskunde dat consistent en volledig is, i.h.b. is er een zo'n formeel systeem voor de rekenkunde.
- Kurt Gödel (1931): *'de (formele) rekenkunde PA is niet volledig'*:

NIET: $\mathbf{N} \vDash \varphi \;\Rightarrow\; \vdash_{PA} \varphi$

Onvolledigheid rekenkunde

- *Gödel toonde zelfs aan dat ieder gezond, consistent formeel systeem dat de rekenkunde omvat, niet volledig is: er zijn altijd ware beweringen (op andere dan formele gronden bekend dat zij waar zijn!) te vinden die niet kunnen worden bewezen in zo'n systeem.*

- genadeslag voor Hilbert's programma!

Presburger rekenkunde

- positieve kanttekening: curieus is dat de rekenkunde over *de natuurlijke getallen met alleen optelling en successor (geen vermenigvuldiging)* *wel* *volledig* kan worden geaxiomatiseerd: *"Presburger rekenkunde". Het venijn zit 'm dus in de vermenigvuldiging!*

Gödel's onvolledigheidsstellingen

- Meer precies bewees Gödel de volgende beweringen:

  1. er is een zin A zodat $\nvdash_{PA} A$ en $\nvdash_{PA} \neg A$.

  (1e stelling van Gödel)

  2. $\nvdash_{PA} Con_{PA}$, als PA consistent is:

  de consistentie van de Peano rekenkunde is *niet binnen* de Peano rekenkunde bewijsbaar

  (2e stelling van Gödel)

Gödel's stellingen

- In feite bewees Gödel zelfs:
  - er is *geen effectief opsombaar axiomastelsel* dat juist de ware rekenkundige uitspraken (m.b.t. het standaardmodel) bewijst.

Gödel's stellingen

- Wij zullen de volgende bewering bewijzen:

  3. er is een zin A zdd $\mathbf{N} \models A$ en $\nvdash_{PA} A$.
- Merk op dat 1. uit 3. volgt:
  - Een bewering is niet zowel waar als onwaar:
    - niet: $\mathbf{N} \models A$ en $\mathbf{N} \models \neg A$,
    - dwz. $\mathbf{N} \not\models A$ of $\mathbf{N} \not\models \neg A$,
    - dwz. $\mathbf{N} \models A \Rightarrow \mathbf{N} \not\models \neg A$.
  - Verder geldt soundness: $\vdash_{PA} A \Rightarrow \mathbf{N} \models A$, en dus $\mathbf{N} \not\models A \Rightarrow \nvdash_{PA} A$.
  - Dus uit 3. $\exists A$ zdd $\mathbf{N} \models A$ en $\nvdash_{PA} A$ volgt $\exists A$ zdd $\mathbf{N} \not\models \neg A$ en $\nvdash_{PA} A$ en dus 1. $\exists A$ zdd $\nvdash_{PA} \neg A$ en $\nvdash_{PA} A$.

Bewijsschets

- BEWIJS. We veronderstellen een *berekenbare injectieve functie* (gödelnummer):

$$g\text{: Formules}^* \rightarrow \mathbf{N}$$

- (d.w.z. (rijtjes) formules uit de objecttaal worden *uniek* gecodeerd)

Gödelcodering

- *arithmetisering v.d. meta-mathematica*
- codering alfabet taal, bijv.

$g(0) = 1$	$g(=) = 5$	$g(\vee) = 9$
$g(s) = 2$	$g(x) = 6$	$g(\rightarrow) = 10$
$g(+) = 3$	$g(y) = 7$	$g(() = 11$
$g(\times) = 4$	$g(\neg) = 8$	$g()) = 12$

Gödelcodering(2)

- codering formules, bijv.

  $g($ x + sy = s(x + y) $) =$

  $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^7 \cdot 11^5 \cdot 13^2 \cdot 17^{11} \cdot 19^6 \cdot 23^3 \cdot 29^7 \cdot 31^{12}$

- codering rijtjes formules, bijv.

  $g(F_1, F_2, F_3, \ldots) = 2^{g(F_1)} \cdot 3^{g(F_2)} \cdot 5^{g(F_3)} \cdot \ldots$

Metataal → objecttaal

- *meta-math. uitspraken* → *rekenkundige uitspraken*
- bijv. rijtje X is prefix van rijtje Y → *g*(X) is speciaal soort deelfactor van *g*(Y)
- een *bewijs* is een *rijtje formules* dat aan allerlei *condities* voldoet die allemaal in de *objecttaal (rekenkunde)* kunnen worden gecodeerd: dit is bepaald geen sinecure!
- Proof(x, y, z) is uitdrukbaar als *rekenkundige* uitspraak

Proof-predikaat

- Definieer een predikaat Proof(x, y, z) zdd.
- Proof(x, y, z) ⇔

  x = *g*(Y) waarbij Y een bewijs (rijtje formules) is van een formule F[z] voor een formule F met 1 vrije variable zdd *g*(F) = y.

- *Proof(x, y, z) kan zelf in de objecttaal worden uitgedrukt als een formule met de 3 variabelen x, y en z.*

"Ik ben niet bewijsbaar!"

- Beschouw nu de formule ¬∃x Proof(x, y, y). Dit is een formule met 1 vrije variabele (y) en heeft dus een gödelnummer g = *g*(¬∃x Proof(x, y, y)).
- Claim: A = ¬∃x Proof(x, g, g) voldoet.
  - (dus de gezochte A = ¬∃x Proof(x, g, g) zegt zoiets als "ik ben niet bewijsbaar")

Vervolg bewijs van stelling

- Claim: $\mathbf{N} \vDash$ ¬∃x Proof(x, g, g) en $\nvdash_{PA}$ ¬∃x Proof(x, g, g).
- Bewijs: stel $\vdash_{PA}$ ¬∃x Proof(x, g, g).(*) Dan is er een gödelnummer p van het bewijs P van ¬∃x Proof(x, g, g). Dan is dus per definitie Proof(p, g, g) waar. (p = *g*(P) waarbij P een bewijs (rijtje formules) is van een formule F[g] voor een formule F met 1 vrije variable zdd *g*(F) = g en F = ¬∃x Proof(x, y, y)).

Q.E.D.!

- Echter uit $\mathbf{N} \vDash$ Proof(p, g, g) volgt $\mathbf{N} \vDash$ ∃x Proof(x, g, g). Nu volgt uit de soundness van PA en (*) dat $\mathbf{N} \vDash$ ¬∃x Proof(x, g, g), en dus $\mathbf{N} \nvDash$ ∃x Proof(x, g, g). Tegenspraak.

∴ (*) is niet waar: $\nvdash_{PA}$ ¬∃x Proof(x, g, g). Dus nu ook $\mathbf{N} \vDash$ ¬∃x Proof(x, g, g) !

Q.E.D